Köklü Sayılar # $\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$

Kareköklü Sayılar:

$1^2=1$	$6^2=36$	$11^2=121$	$16^2=256$
$2^2=4$	$7^2=49$	$12^2=144$	$17^2=289$
$3^2=9$	$8^2=64$	$13^2=169$	$18^2=324$
$4^2=16$	$9^2=81$	$14^2=196$	$19^2=361$
$5^2=25$	$10^2=100$	$15^2=225$	$20^2=400$

Sayıların Kök Dışına Çıkarılması:

$\sqrt{1}=1$
$\sqrt{4}=2$
$\sqrt{9}=3$
$\sqrt{16}=4$

Karekökün içindeki sayı, bir sayının karesi ise, karesi olan sayı dışarı aynen çıkar.

$\sqrt{8}=\sqrt{4.2}=2\sqrt{2}$
$\sqrt{12}=\sqrt{4.3}=2\sqrt{3}$
$\sqrt{18}=\sqrt{9.2}=3\sqrt{2}$
$\sqrt{20}=\sqrt{4.5}=2\sqrt{5}$
$\sqrt{48}=\sqrt{16.3}=4\sqrt{3}$
$\sqrt{72}=\sqrt{36.2}=6\sqrt{2}$

Karekökün içindeki sayı biri kök dışına çıkabilen diğeri çıkamayan iki çarpan olarak ayrılır. Karesi olan sayı dışarı çıkar. Diğeri içerde kalır.

Not: Bazı sayıları ayırmakta zorluk çekersek, OBEB-OKEK deki gibi çarpanlarına ayırırız.

Örnek: $\sqrt{96}=?$

Çözüm:

$\sqrt{96}=\sqrt{16.6}=4\sqrt{6}$ veya

96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$\sqrt{96}=2.2.\sqrt{2.3}=4\sqrt{6}$

Örnek: $\sqrt{6300}=?$

Çözüm: $\sqrt{63.100}=\sqrt{9.7.100}=3.10.\sqrt{7}=30\sqrt{7}$

Not: Reel sayılarda karekökün içi negatif olamaz. Aynı zamanda tüm çift dereceli kökler içinde aynı durum söz konusudur.

$\sqrt{-2}\notin R$ $\quad \sqrt[6]{-1}\notin R$

$\sqrt[4]{-7}\notin R$ $\quad \sqrt[8]{-4}\notin R$

Not: Tek dereceli tüm köklü sayılar reel sayıdır.

$\sqrt[3]{-3}=-\sqrt[3]{3}\in R$

$\sqrt[5]{-7}=-\sqrt[5]{7}\in R$

Not: $\sqrt[n]{a^n}$ ifadesinde,

n çift ise sonuç $|a|$
n tek ise sonuç a } olur.

$\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-\sqrt[3]{2^3}=-2$

$\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{32}=-\sqrt[5]{2^5}=-2$

$\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-\sqrt[3]{3^3}=-3$

$\sqrt[4]{(-2)^4}=|-2|=2$

$\sqrt[4]{-2^4}\notin R$

Hatırlatma:

$(-2)^4 \neq -2^4$

$(-2).(-2).(-2)(-2) \neq -2.2.2.2$

+16 $\quad$ −16

#ayhnyuz#

Köklü Sayılarda Toplama ve Çıkarma

Derecesi ve içi aynı olan köklü sayıların katsayıları arasında toplama ve çıkarma yapılır.

$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}-c\sqrt{x}+d\sqrt{y}=(a-c)\sqrt{x}+(b+d)\sqrt{y}$

Örnek: $\sqrt{48}+2\sqrt{75}-\sqrt{243}=?$

Çözüm:

$\sqrt{16.3}+2\sqrt{25.3}-\sqrt{81.3}=4\sqrt{3}+2.5\sqrt{3}-9\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}+10\sqrt{3}-9\sqrt{3}=(4+10-9)\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

2008-ÖSS: $3\sqrt{8}+2\sqrt{2}-(\sqrt{8}+\sqrt{2})=?$

Çözüm:

$3.\sqrt{4.2}+2\sqrt{2}-(\sqrt{4.2}+\sqrt{2})=3.2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-(2\sqrt{2}+\sqrt{2})$

$6\sqrt{2}+2\sqrt{2}-(3\sqrt{2})=8\sqrt{2}-3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

1999-ÖSS-İPT: $\sqrt{(-4)^2}-\sqrt[3]{(-3)^3}+\sqrt{25}=?$

Çözüm:

$|-4|-(-3)+5=4+3+5=12$

1995-ÖSS: $\sqrt{9}+\sqrt{(-4)^2}-\sqrt{(-5)^2}=?$

Çözüm:

$3+|-4|-|-5|=3+4-5=2$

1990-ÖSS: $\sqrt{(-4)^2}-\sqrt{4^2}-(-2)^3=?$

Çözüm:

$|-4|-|4|-(-8)=4-4+8=8$

1982-ÖSS: Aşağıdaki irrasyonel sayılardan hangisinin yaklaşık değeri bilinirse $\sqrt{432}$ değeri kolaylıkla bulunabilir?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{11}$

Çözüm:

432	2 ⎫ 2
216	2 ⎭
108	2 ⎫ 2
54	2 ⎭
27	3 ⎫ 3
9	3 ⎭
3	3
1	

$\sqrt{432}=2.2.3\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

$\sqrt{3}$ bilinirse

Köklü Sayılarda Çarpma ve Bölme:

$\sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x.y}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

* $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{a.b}$
* $\sqrt{a}.\sqrt{a}=a$
* $x\sqrt{a}.y\sqrt{b}=x.y\sqrt{a.b}$

* $\sqrt{3}.\sqrt{6}=\sqrt{18}=\sqrt{9.2}=3\sqrt{2}$
* $\sqrt{7}.\sqrt{7}=7$
* $2\sqrt{2}.3\sqrt{6}=6\sqrt{12}=6.\sqrt{4.3}=6.2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

$(a\sqrt{b})^2=(a\sqrt{b}).(a\sqrt{b})=a^2.b$

$(2\sqrt{5})^2=(2\sqrt{5}).(2\sqrt{5})=4.5=20$

$(3\sqrt{2})^2=3^2.2=9.2=18$

$(5\sqrt{3})^2=25.3=75$

2007-ÖSS: $(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2+2\sqrt{10}+3=?$

Çözüm:

$(\sqrt{2})^2-2(\sqrt{2}).(\sqrt{5})+(\sqrt{5})^2+2\sqrt{10}+3$

$=2-2\sqrt{10}+5+2\sqrt{10}+3=10$

2005-ÖSS: $\dfrac{\sqrt{4,44}+\sqrt{9,99}}{\sqrt{111}}=?$

Çözüm: $\dfrac{\sqrt{\frac{444}{100}}+\sqrt{\frac{999}{100}}}{\sqrt{111}}=\dfrac{\frac{\sqrt{4.111}}{\sqrt{100}}+\frac{\sqrt{9.111}}{\sqrt{100}}}{\sqrt{111}}$

$=\dfrac{\frac{2\sqrt{111}+3\sqrt{111}}{10}}{\sqrt{111}}=\dfrac{5\sqrt{111}}{10}.\dfrac{1}{\sqrt{111}}=\dfrac{1}{2}=0,5$

2003-ÖSS: $\sqrt{10}.(\sqrt{6,4}+\sqrt{0,4})=?$

Çözüm:

$\sqrt{10}.\left(\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{10}}+\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{10}}\right)=\sqrt{10}.\left(\dfrac{8+2}{\sqrt{10}}\right)=10$

2003-ÖSS: $a=\sqrt{2}+1$ ise $a(a-1).(a-2)=?$

Çözüm:

$(\sqrt{2}+1).(\sqrt{2}).(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}(2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}.1=\sqrt{2}$

1997-ÖSS: $\dfrac{\sqrt{40}.\sqrt{18}}{\sqrt{80}}=?$

Çözüm:

$\sqrt{\dfrac{40.18}{80}}=\sqrt{9}=\boxed{3}$

1996-ÖSS: $\dfrac{\sqrt{0,48}-\sqrt{0,27}}{\sqrt{1,47}}=?$

Çözüm:

$$\frac{\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{100}}-\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{100}}}{\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{100}}}=\frac{\frac{\sqrt{16.3}}{10}-\frac{\sqrt{9.3}}{10}}{\frac{\sqrt{49.3}}{10}}=\frac{\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{10}}{\frac{7\sqrt{3}}{10}}=\frac{\sqrt{3}}{7\sqrt{3}}=\boxed{\frac{1}{7}}$$

1991-ÖSS: $\dfrac{\sqrt{3}.\sqrt{12}}{\sqrt{0,16}+\sqrt{0,36}}=?$

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{36}}{\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}}+\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{100}}}=\frac{6}{\frac{4}{10}+\frac{6}{10}}=\frac{6}{\frac{10}{10}}=\boxed{6}$$

1983-ÖSS: $\sqrt{0,25}-\sqrt{121}+\sqrt{1,44}=?$

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}}-11+\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}}=\frac{5}{10}-\frac{11}{1}_{(10)}+\frac{12}{10}=\frac{17-110}{10}=\boxed{-9,3}$$

Eşlenik (Paydanın Rasyonel Yapılması)

Payda Tek Terimli ise,

Paydadaki köklü ifade ile kesir genişletilir.

- $\dfrac{4}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}_{(\sqrt{2})}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

- $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}_{(\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{3}}{2.3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Payda $x+\sqrt{y}$ ya da $x-\sqrt{y}$ biçiminde ise

eşlenikleri ile çarpılır.

- $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}_{(1+\sqrt{2})}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{-1}=-(1+\sqrt{2})$

- $\dfrac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}_{(2+\sqrt{2})}=\dfrac{6-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2}{4-2}=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$

2010-YGS: $\dfrac{6}{\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=?$

Çözüm:

$$\frac{6}{\sqrt{3}}_{(\sqrt{3})}-\frac{2}{\sqrt{3}+1}_{(\sqrt{3}-1)}=\frac{6\sqrt{3}}{3}-\frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}+1=\boxed{\sqrt{3}+1}$$

2010-YGS: Hangisi rasyonel sayıdır?

A) $\sqrt{2}+1$ B) $2\sqrt{2}-1$ C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

D) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ E) $\dfrac{2\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-3}$

Çözüm: A, B ve C şıklarında köklü ifadeler yok edilemeyeceğinden cevap olamazlar.

D: $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}_{(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2-1}=2-\sqrt{2}$ cevap olamaz.

cevap E şıkkı.

2009-ÖSS: $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=?$

Çözüm:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}_{(\sqrt{2}-1)}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}_{(\sqrt{2}+1)}=\frac{(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}+1)}{2-1}=\frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1}{1}=\boxed{-2}$$

2001-ÖSS: $\dfrac{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}=?$

Çözüm: Paydalar eşitlenirse,

$$\frac{\frac{2-1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

1998-ÖSS: $\frac{1}{\sqrt{5}-1}-\frac{1}{\sqrt{5}+1}=?$

Çözüm:

$$\underset{(\sqrt{5}+1)}{\frac{1}{\sqrt{5}-1}}-\underset{(\sqrt{5}-1)}{\frac{1}{\sqrt{5}+1}}=\frac{(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{5}-1)}{5-1}=\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{4}=\frac{2}{4}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

1996-ÖSS: $\frac{3}{3+2\sqrt{2}}+\frac{3}{3-2\sqrt{2}}=?$

Çözüm:

$$\underset{(3-2\sqrt{2})}{\frac{3}{3+2\sqrt{2}}}+\underset{(3+2\sqrt{2})}{\frac{3}{3-2\sqrt{2}}}=\frac{3(3-2\sqrt{2})+3(3+2\sqrt{2})}{9-8}$$

$$=\frac{3(3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2})}{1}=3.6=\boxed{18}$$

1994-ÖSS: $a=\sqrt{6}+1,\ b=\sqrt{6}-1,\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=?$

Çözüm:

$$\underset{(\sqrt{6}+1)}{\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-1}}+\underset{(\sqrt{6}-1)}{\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}+1}}=\frac{(\sqrt{6}+1)^2+(\sqrt{6}-1)^2}{6-1}$$

$$=\frac{6+2\sqrt{6}+1+6-2\sqrt{6}+1}{5}=\boxed{\frac{14}{5}}$$

1987-ÖSS: $\sqrt{4{,}9}+\sqrt{0{,}9}=?$

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10}}=\frac{7+3}{\sqrt{10}}=\underset{(\sqrt{10})}{\frac{10}{\sqrt{10}}}=\frac{10\sqrt{10}}{10}=\boxed{\sqrt{10}}$$

1992-ÖYS: $\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{ab}$ ise b nin a türünden değeri nedir?

Çözüm:

$$\underset{(\sqrt{a})}{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}+\underset{(\sqrt{b})}{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}=\sqrt{ab},\quad \frac{a+b}{\sqrt{ab}}=\sqrt{ab},\quad a+b=a.b$$

$$a=ab-b,\quad a=b(a-1),\quad \boxed{b=\frac{a}{a-1}}$$

Köklerin Derecelerini Eşitlemek:

$\sqrt[n]{x}\Rightarrow\sqrt[m.n]{x^m}$ Kökün derecesi ve kökün içi aynı kuvvetle çarpılabilir.

$\sqrt[m.p]{x^{m.n}}\Rightarrow\sqrt[p]{x^n}$ Kökün içi ve derecesi sadeleştirilebilir.

örnek:

$\sqrt{2}.\sqrt{2}=\sqrt{4}=2$

$\sqrt[3]{2}.\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^2}.\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32}$

$\sqrt[3]{3}.\sqrt{2}=\sqrt[6]{9}.\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{72}$

Köklü Sayılarda Sıralama:

* Köklerin dereceleri eşitlenebilir.
* Köklerin içi eşitlenebilir.

örnek: $a=\sqrt{3},\ b=\sqrt[4]{2},\ c=\sqrt[3]{3}$ ise a,b,c yi sıralayın?

Çözüm:

* Köklerin dereceleri 12 de eşitlenir.

$a=\sqrt[12]{3^6},\quad b=\sqrt[12]{2^3},\quad c=\sqrt[12]{3^4}$

$3^6>3^4>2^3$ old. $a>c>b$

2011-YGS: $x=\sqrt[3]{4},\ y=\sqrt[4]{8},\ z=\sqrt[5]{16}$

x,y,z yi sıralayın?

Çözüm:

* Köklerin dereceleri 60 ta eşitlenir.

$x=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[20.3]{(2^2)^{20}}=\sqrt[60]{2^{40}}$

$y=\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[15.4]{(2^3)^{15}}=\sqrt[60]{2^{45}}$

$z=\sqrt[5]{2^4}=\sqrt[12.5]{(2^4)^{12}}=\sqrt[60]{2^{48}}$

$2^{48}>2^{45}>2^{40}$ old $\boxed{z>y>x}$

2011-LYS: $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$ ise x ne olabilir?

A) $\frac{1}{2}$, B) $\frac{3}{2}$, C) $\frac{4}{3}$, D) $\frac{7}{4}$, E) $\frac{6}{5}$

Çözüm: $(\sqrt{2})^2 < x^2 < (\sqrt{3})^2$, $2 < x^2 < 3$

A) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \in (0,1)$

B) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \in (2,3)$

C) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \in (1,2)$

D) $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \in (3,4)$

E) $\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} \in (1,2)$

Köklü Sayıların üslü olarak Yazılması

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

Örnek:

$\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$

$\sqrt{2^{10}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$

$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$

2007-ÖSS: $3^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{27} = ?$

Çözüm:

$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$

1998-ÖSS: $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}\right)^{-1}} = ?$

Çözüm:

$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

1997-ÖSS: $\sqrt[4]{0,0256} \cdot \sqrt[3]{(0,008)^{-1}} = ?$

Çözüm:

$\sqrt[4]{\frac{256}{10.000}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1000}{8}} = \sqrt[4]{\frac{4^4}{10^4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{10^3}{2^3}} = \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{2} = 2$

Örnek: $\frac{\sqrt{4^{x+1}}}{\sqrt[3]{2^{x-6}}} = 16$ ise x kaçtır?

Çözüm: $\frac{2^{\frac{2(x+1)}{2}}}{2^{\frac{x-6}{3}}} \times 2^4$, $2^{x+1} = 2^{\frac{x-6}{3}} \cdot 2^4$

$\Rightarrow 2^{x+1} = 2^{\frac{x-6}{3}+4} \Rightarrow x+1 = \frac{x-6}{3}+4$

$x-3 \times \frac{x-6}{3}$, $3x-9 = x-6$, $2x = 3$, $x = \frac{3}{2}$

Örnek: $\frac{\sqrt[5]{3^{5x-10}}}{\sqrt{9^{2x-1}}} = \frac{1}{27}$ ise $x = ?$

Çözüm:

$\frac{3^{\frac{5(x-2)}{5}}}{3^{\frac{2(2x-1)}{2}}} \times \frac{1}{3^3}$, $3^{x-2} \cdot 3^3 = 3^{2x-1}$, $3^{x+1} = 3^{2x-1}$

$\Rightarrow x+1 = 2x-1$, $x = 2$

1983-ÖSS: $\frac{\sqrt{9^{3x+1}}}{\sqrt[3]{3^{9x-3y}}} = 27$ ise $y = ?$

Çözüm:

$\frac{3^{\frac{2(3x+1)}{2}}}{3^{\frac{3(3x-y)}{3}}} \times 3^3$, $3^{3x+1} = 3^{3x-y} \cdot 3^3$, $3^{3x+1} = 3^{3x-y+3}$

$\Rightarrow 3x+1 = 3x-y+3$, $y = 2$

Katsayının Kök içine Alınması:

$$a\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n \cdot x}$$

Örnek:

$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$

$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8.3} = \sqrt[3]{24}$

$2\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{32.2} = \sqrt[5]{64}$

Örnek: $2\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{36.a}$ ise $a = ?$

Çözüm:

$\sqrt[3]{8.12} = \sqrt[3]{36.a}$, $8.12 = 36.a$, $a = \frac{8}{3}$

örnek: $2\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{x}$ ise x kaçtır?

Çözüm:
$\sqrt[3]{8.3} = \sqrt[3]{27.x}$, $8.3 = 27.x$, $x = \frac{8}{9}$

örnek: $\sqrt[3]{2} = \sqrt{2x}$ ise x kaçtır?

Çözüm:
$\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{(2x)^3}$, $4 = 8x^3$, $\frac{1}{2} = x^3$, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

1991-ÖYS: $x.\sqrt{0,4} = 1$ ise $x = ?$

Çözüm:
$\sqrt{x^2.\frac{4}{10}} = \sqrt{1}$, $x^2.\frac{4}{10} = 1$, $x^2 = \frac{10}{4}$, $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$

İç İçe Kökler:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m.n]{x}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[k]{x}}} = \sqrt[n.m.k]{x}$$

$$\sqrt[n]{x\sqrt[m]{y}} = \sqrt[n.m]{x^m.y}$$

$$\sqrt[m]{x\sqrt[n]{y\sqrt[k]{z}}} = \sqrt[m.n.k]{x^{n.k}.y^k.z}$$

örnek:

$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$

$\sqrt{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{16}$

$\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \sqrt[18]{2^6.2^2.2} = \sqrt[18]{2^9} = \sqrt{2}$

2000-ÖSS: $\sqrt[3]{2\sqrt[5]{x}} = \sqrt[3]{2}.\sqrt[5]{3}$

Çözüm:
$\sqrt[15]{2^5.x} = \sqrt[15]{2^5}.\sqrt[15]{3^3}$, $\sqrt[15]{2^5.x} = \sqrt[15]{2^5.3^3}$

$\Rightarrow 2^5.x = 2^5.3^3$, $x = 3^3$

* $x, y \in R^+$, $x > y$, $a = x+y$, $b = x.y$ ise

$$\sqrt{a \mp 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} \mp \sqrt{y}$$

örnek: $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = ?$

Çözüm:
$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{1} = \sqrt{3}-1$
(3 1)

örnek: $\sqrt{10+2\sqrt{21}} = ?$

Çözüm:
$\sqrt{10+2\sqrt{21}} = \sqrt{7}+\sqrt{3}$
(7 3)

örnek: $\sqrt{5-\sqrt{24}} = ?$

Çözüm:
$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$
(3 2)

örnek: $\sqrt{4+\sqrt{15}} = ?$

Çözüm:
$\sqrt{4+2\sqrt{\frac{15}{4}}} = \sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$
($\frac{5}{2}$ $\frac{3}{2}$)

1995-ÖYS: $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$, $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ sayılarının aritmetik ortalaması nedir?

Çözüm: Aritmetik Ortalama = $\frac{\text{Terimlerin Toplamı}}{\text{Terim Sayısı}}$

$\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ (5 1) → $\sqrt{5}-1$, $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ (5 1) → $\sqrt{5}+1$

$A.O = \frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{5}+1}{2}$

$\Rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

1990-ÖYS: $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = ?$

Çözüm:
$\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = (\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)$
(3 1) (3 1)

$= \sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1 \Rightarrow 2$

Not: $\sqrt[n]{f(x)}$ ifadesinde,

n tek ise ifade daima reel sayıdır.

n çift iken $f(x) \geq 0$ için reel sayıdır.

Örnek: $\sqrt{3x-9} + \sqrt[4]{7-x}$ ifadesi reel sayı ise x hangi aralıktadır?

Çözüm:

$3x-9 \geq 0$, $x \geq 3$
$7-x \geq 0$, $7 > x$
$7 > x \geq 3$, $[3,7]$

Örnek: $A = \dfrac{\sqrt{x-4} + 4x}{3x + \sqrt{4-x}}$ reel sayı ise $A = ?$

Çözüm:

$x-4 \geq 0$ ve $4-x \geq 0$ old. $x=4$ olur. $x=4$ için,

$A = \dfrac{\sqrt{0}+16}{12+\sqrt{0}} = \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3}$

Alıştırmalar:

1) $\sqrt{\dfrac{4}{9} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4}} = ?$

Çözüm:

$\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \left|\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{1}{6}\right| = \dfrac{1}{6}$

2) $\sqrt{\dfrac{9}{25} - \dfrac{6}{35} + \dfrac{1}{49}} = ?$

Çözüm:

$\sqrt{\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{7}\right)^2} = \left|\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{7}\right| = \dfrac{16}{35}$

3) $\sqrt{100.102+1} = ?$

Çözüm: $n=100$ denirse

$\sqrt{n.(n+2)+1} = \sqrt{n^2+2n+1} = \sqrt{(n+1)^2} = \sqrt{101^2} = 101$

4) $\sqrt[3]{2007.1990 - 2006.1991} = ?$

Çözüm:

$a=1990$, $b=2006$ denirse

$\sqrt[3]{(b+1).a - b(a+1)} = \sqrt[3]{ab+a-ab-b}$

$= \sqrt[3]{a-b} = \sqrt[3]{1990-2006} = \sqrt[3]{-16}$

5) $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = ?$

Çözüm: $\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+1)-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sqrt{3}+1$

6) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}} = ?$

Çözüm:

$\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+1)}$ $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

$= \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$

7) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = m$ ise $\sqrt{x+5} + \sqrt{x}$ in m cinsinden değeri nedir?

Çözüm:

$\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = m$
$\times \ \sqrt{x+5} - \sqrt{x} = n$

$x+5-x = m.n$, $5 = m.n$, $n = \dfrac{5}{m}$

8) $\sqrt{7} - \sqrt{2} = A$ ise $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ nin A cinsinden değeri nedir?

Çözüm:

$\sqrt{7} - \sqrt{2} = A$
$\times \ \sqrt{7} + \sqrt{2} = B$

$7-2 = A.B$, $5 = A.B$, $B = \dfrac{5}{A}$

#cyhnyuz#

9) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})^x = 4$ ise $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^x$ kaçtır?

Çözüm:

$$(\sqrt{7}+\sqrt{3})^x = 4$$
$$\times \quad (\sqrt{7}-\sqrt{3})^x = A$$

$4^x = 4A$, $A = \frac{4^x}{4}$, $A = 4^{x-1}$

İç İçe Sonsuz Kökler:

Tekrar edilen kısma x denilip, x'e eşitlenerek işlem yapılır.

Örnek: $\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\dots}}}$

Çözüm:

$\sqrt{30+x} = x$, $30+x = x^2$

$x^2-x-30=0$, $(x-6).(x+5)=0$

x −6
x +5

$x=6$ $x \neq -5$

Örnek: Aynı soruyu kısa yoldan çözünüz?

Çözüm: İç içe sonsuz köklerde toplama ve çıkarmada verilen sayı ardışık iki tamsayının çarpımı olarak yazılıyorsa toplamada büyük olanı, çıkarmada küçük olanı alınır.

$\sqrt{30+\sqrt{30+\dots}} = 6$

6 5

Örnek: $\sqrt{72-\sqrt{72-\sqrt{72-\dots}}} + \sqrt{42+\sqrt{42+\dots}} = ?$

Çözüm: $\sqrt{72-\sqrt{72-\dots}} + \sqrt{42+\sqrt{42+\dots}}$

9 8 7 6

Çıkarmada küçük, toplamada büyük olanı aldık.

$8+7=15$

Örnek: $\sqrt{27:\sqrt{27:\sqrt{27:\dots}}} = ?$

Çözüm:

$\sqrt{27:x} = x$, $\sqrt{\frac{27}{x}} = x$, $\frac{27}{x} = x^2$, $x^3=27$, $x=3$

Not: $\sqrt[n]{a.\sqrt[n]{a.\sqrt[n]{a\dots}}} = \sqrt[n-1]{a}$

$\sqrt[n]{a:\sqrt[n]{a:\sqrt[n]{a:\dots}}} = \sqrt[n+1]{a}$

Pratik yol:

$\sqrt{27:\sqrt{27:\dots}} = \sqrt[2+1]{27} = \sqrt[3]{27} = 3$

Örnek: $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2\dots}}}} = ?$

Çözüm:

$\sqrt[3]{2\sqrt{2.x}} = x$

$\sqrt[6]{8x} = x$

$8x = x^6$, $x^6-8x=0$, $x(x^5-8)=0$

$\Rightarrow x \neq 0$, $x^5=8$, $x=\sqrt[5]{8}$

1975-ÖSS: $2\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\dots}}} - \sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\dots}}} = 6$, $a \in R^+$ ise a kaçtır?

Çözüm:

$2\sqrt[2-1]{a} - \sqrt[3-1]{a} = 6$

$2a-\sqrt{a}=6$, $2a-6=\sqrt{a}$

$(2a-6)^2=(\sqrt{a})^2$, $4a^2-24a+36=a$

$4a^2-25a+36=0$

4a −9
a −4

$4a-9=0 \Rightarrow a=\frac{9}{4}$

$a-4=0 \Rightarrow a=4$

$a=\frac{9}{4}$, $2a-6=\sqrt{a}$ denk. sağlamaz.

$a=4$, denklemi sağlar.

$a=4$

#cyhnyvz#